

113學年度科學教育專案年度期中報告綱要

計畫編號：30

計畫名稱：以 APOS 理論為基礎之差異化教學活動探討國小中年級學生數學學習之實踐與成效評估

Implementation and Assessment of Middle-Grade Elementary School Students' Learning Mathematics via APOS-Based Differentiation Instruction

主持人：陳孟訓

執行單位：臺南市安南區和順國民小學

壹、計畫目的及內容：

由經濟合作暨發展組織（OECD）所舉辦國際學生能力評量（Programme for International Student Assessment, PISA）於去年(2023年)5日公布成績，測驗對象為15歲學生，科目包含數學、閱讀與科學，台灣不受疫情影響，在此次評比項目閱讀、數學與科學三科成績與上屆(2018年)相較皆逆勢變強，分別增加16分、12.6分與21.6分，數學科更挺進全球第三名。最亮眼處屬前10%頂尖學生的數學表現，與上屆(PISA2018)相較狂增30.6分，但也存在令人憂心的後10%學生的數學成績微幅下降4.1分，雖未達統計上的顯著變化，但統計數據所呈現的是數學成績的 M 型化現象，高分組的學生表現越來越突出，低分組的卻是越來越趨向習得無助感，而這樣的現象在研究者的工作場域更顯清晰，經常在現場被教育工作者指稱的客人就是 M 型化現象的典型，中、高成就的學生為了等待低成就學生跟上必須學會等待，而低成就的學生為了跟上中、高成的的學生在課堂上的課程內容卻必須花上很大的力氣，但未必有成就感，於是高成就學生因為等待、課程內容無挑戰性而覺得無趣，而低成就的學生因為習得無助感，兩者皆漸漸成為課室中的客人。

天下雜誌2023年教育特刊以「平等教育，沒有脫隊的孩子」作為標題，文中提及「在強調素養教育的當代，為何 OECD 疾呼回頭重視學生的基本學力？城鄉與貧富的不平等已嚴重侵蝕教育的機會，成為全球難題」(p38)。OECD 在「教育公平與包容」報告中直陳，城鄉差距正以一般人難以想像的速度擴大，連帶威脅弱勢孩子的學習資源，想有效幫助這群低成就學和學習資源不足的學生，OECD 提出六項建議，包含重新調整課程設計與教學方法、更新教師培訓制度，與建立觀察學生需求的機制等(天下雜誌，2023)，清大社會學研究所副教授、鑽研教育社會學的林文蘭於天下雜誌2023年教育特刊提及：「對不同學習條件的學生，不是用標配或制式化教學模式，就可以解決學習成效不彰的問題」。

十二年課程綱要以「成就每一個孩子—適性揚才、終身學習」為願景，其中適性揚才強調以學習者為本位卻常淪為「口號」。而因學生差異引起的問題常是不爭的事實(Tomlinson,1995)，意味著相同的教育方法並不能適用於每位孩子(張宇樑，2015)，因此回應學習者需求的差異化教學(Differentiation Instruction, DI)應運而生。Tomlinson(1995)於如何在混合能力的班級中進行差異化教學(How to Differentiate Instruction in Mixed-Ability Classrooms)一書中提到差異化教學是指「改變課堂上發生的事情，讓學生有多種選擇來獲取資訊、理解想法並表達所學內容」。吳清山(2012)提到差異化教學(DI)是指教師能依據學生個別差異及需求，彈性調整教學內容、進度和評量方式，以提升學生學習效果和引導學生適性發展。甄曉蘭(2012)認為差異化教學是對於同一個班級裡不同學習風格、不同學習需求和不同學習興趣的學習者，提供多元學習的教學方式。

有此可見，差異化教學強調的是回應學習者的需求，提供多元的學習媒介給學生進行學習、理解及表達想法，差異化教學在學習成效的影響，在相關研究(楊妃婷，2020；Strong, Thomas, Perini, & Silver, 2004；Chamberlin & Powers,

2010；Schneider & Meyer,2012)得知，借重於差異化教學之理念與策略運用於數學教學，皆獲得顯著的執行成效。

差異化教學是一種教育哲學觀點，著重於教與學的思維和原則(Tomlinson & Imbeau, 2010)，而差異化教學的哲學奠基於下列四個原則：(1)多樣性是正常且可貴的；(2)每個學習者都具有隱藏起來且能向外擴張的學習力；(3)老師的責任就是成為學生成功的工程師；(4)教育者應該成為每個踏進學校大門的學生的鬥士(Tomlinson，2014，張碧珠等譯，2018)。它是一種教學取向(Instruction Approach)，沒有標準化的教學方式或策略，但教學重點需強調與學生學習經驗結合，教學策略需配合學生的需求，評量亦需多元、彈性和適切，且能評估學生「持續(ongoing)」的表現，教學的重點並非設計一個新課程，而是「現有」課程的調整及修正(Roberts & Inman, 2007)。較脈絡化的教學設計流程莫過於Prast et al.(2015)提出差異化循環(Cycle of Differentiation)如圖1所示。

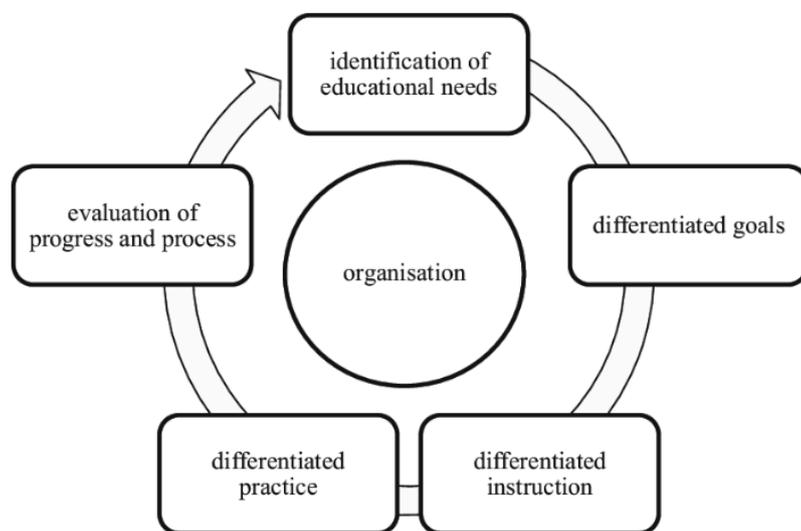


圖1 差異化循環(Cycle of Differentiation) (Prast et al., 2015)

研究者於111學年度科學教育專案計畫基於APOS-ACE理論之數學奠基活動探討國小「數與量」補救教學之實踐與成效評估(第一年)研究結果發現：(1)大

部分個案學生接受「基於 APOS/ACE 理論之數學奠基活動」有助於因數與倍數整體概念的學習；(2)大部分個案於表示接受「基於 APOS/ACE 理論之數學奠基活動」課程設計有益於個案在自我效能的提升；(3)數學自我效能與學生學習成效間似乎存在正比的關係。

綜上，本研究計畫將結合「111學年度科學教育專案計畫基於 APOS-ACE 理論之數學奠基活動」與差異化教學取向探討國小中年級學生數學學習之實踐與成效評估，差異化教學設計設計流程將參酌 Prast et al.(2015) 所提出的差異化循環架構設計，成效評估分為學習成效與自我效能兩部份。

貳、文獻探討與理論架構

一、數學自我效能

自我效能(self-efficacy)一詞是由社會學習論的創始者班杜拉(Bandura)所提出的理論，係指個人在目標追求中面臨一項特殊工作時，對該工作動機之強弱，取決於個人對自我效能的評估(Bandura,1997)。自我效能分為「表現成就」(performance accomplishment)、「替代經驗」(vicarious experience)、「語言說服」(verbal persuasion)及「生理狀態」(physiological states)等四個構念(construct)形成(Bandura,1977)，是透過學生對於自我表現解讀發展而成(高家斌、蘇巧慧，2014)。有相關研究(Bandura,1977; Corkett, Hatt & Benevides,2011; Hoy & Spero,2005; Schunk,2003)提出自我效能與學生的學習之間有正向的關係，龔心怡(2008)影響數學學習成就相關因素探究：數學自我概念與數學自我效能的研究中提到，數學自我效能越高的學生，其數學學業表現也愈好。

二、理論架構

本章節將討論到研究(APOS-ACE)的理論架構分述如下：

(一)APOS 理論

APOS 理論(APOS Theory)是一個描述數學概念如何被學習的理論模型，是由美國教育家 Dr. Dubinsky 所提出的，它是一個用以解釋學習個體如何心理建構對於數學概念的理解的理論(Arnon et al, 2014, p17)。APOS 理論是以 Piaget 所提出的反思抽象理論(theory of re-flective abstraction)為基礎所發展出來的，聚焦於心智結構(mental structures)及其心理機制(mental mechanisms)。在心智結構上包括行動(action)、處置(process)、物件(object)及基模(schema)四個階段，而心理機制則有內化(interiorization)、協調(coordination)、反轉(reversal)、封包(encapsulation)、解封包(de-encapsulation)、主題化(thematization)，以及形成 $A \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow S$ 過程進展(Arnon et al, 2014, p10)(如圖2)

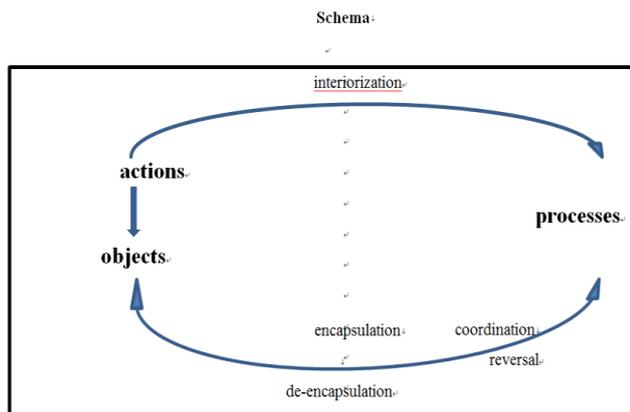


圖2 建構數學知識的心智結構及機制(Asiala et al., 1996)

行動 (action) 是對物件的移轉 (transformation)，常被個體視為有一外在的引發。處置 (process) 是個體建立在對物件的重複行動 (action) 上的反思，最後可以抽象序列行動的意義，形成一自我反應的自動化處理常式，不必受外在刺激的影響，因此可將一輸入密切地移轉成輸出關係的一般化。當個體對一公式表示式建立自求數值 (self-evaluating) 的心像，這時就顯示此個體具有處置的概念。具有處置概念的個體可以逆推或解構其

正向行動，不需要實際去執行計算，就能知道最後結果，並可以接受公式中的數值修改成未知數也是一種結果。物件（object）則是內化（interiorization）處置的結果，也是個體對一種獲多種處置的反思，將整個處置變成一種自動化之程式，以代數關係（公式）加以封包成一實體（膠囊化），之後可用來移轉或行動或與其他物件運算。基模（scheme）是由一或數個物件及其處置所集聚的概念構造圖，也可視為個體保留核心概念及其關係的一種集聚知識，這種知識使得學生知曉何時及如何使用這些概念。基模一旦被建構，物件和處置是被關聯的，且有順序先後的排序。基模知識可以讓資訊被接受或存取使用，當使用者取得數學概念，原理和程式時，就可將其轉換成基模，作為下次數學活動如探測或分類等之知識基底，基模形成後又可以做為下次較高階行動的基礎(謝哲仁、陳孟訓、李慶志，2014)。

此外，APOS 理論提供一個解釋模型-起源分解(GD)，它是一個假設性模型(hypothetical model)，描述學生為了學習一個特定數學概念時所必須建構的心智結構與機制(Asiala et al., 1996)，透由 APOS 理論與起源分解，我們可以觀察學習者建構知識的過程，也可以獲知學習者是否掌握正確概念，從而獲得學生如何習得數學概念的解釋，也能從中覺察學習者的困難點進行教學活動的修改（曾建銘，2016）。

(二) ACE 教學循環(the ACE Teaching Cycle)

Dubinsky & Leron(1994)強調每一個心智結構都來自於起源分解(GD)。而起源分解(GD)對教學方法來說，是一個用以連接 APOS 理論起點，我們統稱為 ACE 教學循環。它是一種教學策略(pedagogical strategy)是由三種元素所組成：活動(activities)、課室討論(classroom discussion)及課後練習

(exercises done outside the class)，分述如下(Arnon et al, 2014, p58)：

1. **行動(activities)**：是 ACE 教學循環的第一個步驟，學生們採用團體合作的模式進行來自起源分解(GD)的學習任務，藉以協助他們建構心智結構(mental constructions)。這個階段的活動主要聚焦於反思抽象(reflective abstraction)而不是獲得正確答案。
2. **課室討論(classroom discussion)**：是 ACE 教學循環的第二部分，涉及小團體及講師引領的班級討論，如在學生們在執行教學者所指派之實驗活動型紙筆任務(paper-and-pencil tasks)及計算。課室討論及課堂中的任務給予學生有對任務反思的機會，特別是在實驗室完成的活動。當教學者引導討論時，他或她可能會提供定義、解釋，又或者是一個宏觀的觀點去緊控住他們正在思考或執行的。
3. **課後練習(exercises done outside the class)**：是 ACE 教學循環的第三部分，由標準的問題所組成，用起強化學習活動及課堂討論。練習是用以延續發展自起源分解的心智結構，另引導學生應用他們所學及思考相關的數學想法。

ACE 教學循環與起源分解的關聯如圖3所示。

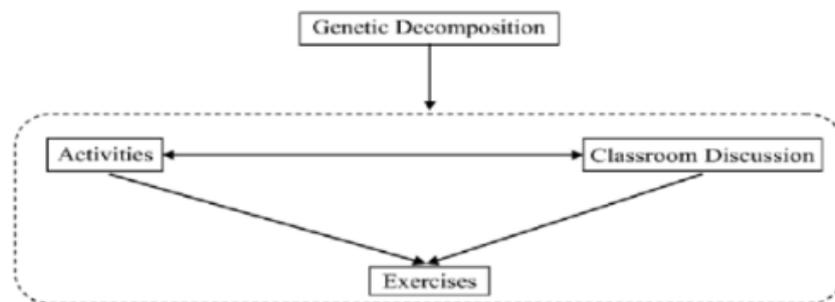


圖3 ACE 教學循環及起源分解的關聯(Asiala et al., 1996)

參、 研究方法及步驟：

本研究將採用 APOS 作為研究架構，使用典範(paradigm)中部分或全部的元素。首先，我們將聚焦於數學概念上具體物表徵所衍生的教學概念，繪製出概念的基因起解(GD)。第二，進行相對應的 ACE 教學循環設計並同時搭配差異化循環架構於設計與實踐教學階段，結合差異化任務學習包(Learning Package of Differentiated Instruction Tasks)，如圖4所示。第三，進行過程資料的蒐集與分析，完成報告撰寫。



圖4 差異化任務學習包示例

(Learning Package of Differentiated Instruction Tasks)

關於課程單元挑選，主要是透過分析實驗班級及該年段於「113縣市基本學力測驗」及「113科技化評量篩選測驗」結果進行挑選，課程單元規劃如表1：

表1 課程單元規劃一覽表

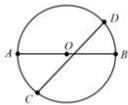
單元名稱	113 基本學力測驗錯誤題型	113 科技化評量篩選測驗																														
除法： 「認識除法」、「認識餘數」、「商為1位數的直式除法」、「0和1的除法」、「認識偶數和奇數」	17. 一百多顆糖果裝滿7袋，每袋裝有16顆，還剩下5顆。請問：至少要多少顆糖果，才能裝滿7袋的糖果？ ① 2顆 ② 5顆 ③ 9顆 ④ 11顆 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>選項</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>其他</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>HSES</td> <td>0.31</td> <td>0.1</td> <td>0.1</td> <td>0.49</td> <td>0.01</td> </tr> <tr> <td>全體</td> <td>0.26</td> <td>0.09</td> <td>0.08</td> <td>0.57</td> <td>0.01</td> </tr> <tr> <td>高分組</td> <td>0.21</td> <td>0.03</td> <td>0.02</td> <td>0.74</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>低分組</td> <td>0.28</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.38</td> <td>0.01</td> </tr> </tbody> </table>	選項	1	2	3	4	其他	HSES	0.31	0.1	0.1	0.49	0.01	全體	0.26	0.09	0.08	0.57	0.01	高分組	0.21	0.03	0.02	0.74	0	低分組	0.28	0.16	0.17	0.38	0.01	6. 有50張圖畫紙，平均分給6組，每組最多分到多少張圖畫紙？剩下多少張？ (1) 每組最多分到7張，剩下8張 (2) 每組最多分到8張，剩下0張 (3) 每組最多分到8張，剩下2張 (4) 每組最多分到9張，剩下4張 <b style="color: red;">通過率14/61
選項	1	2	3	4	其他																											
HSES	0.31	0.1	0.1	0.49	0.01																											
全體	0.26	0.09	0.08	0.57	0.01																											
高分組	0.21	0.03	0.02	0.74	0																											
低分組	0.28	0.16	0.17	0.38	0.01																											

7. 「32枝筆，每8枝裝一盒，最多可以裝成多少盒？還剩下多少枝？」
下列哪個算式和答案都正確？

- (1) $32 \div 8 = 3 \dots 8$
答：最多可以裝成3盒，剩下8枝。
- (2) $32 \div 8 = 3 \dots 8$
答：最多可以裝成8盒，剩下3枝。
- (3) $32 \div 8 = 4 \dots 0$
答：最多可以裝成4盒，剩下0枝。
- (4) $32 \div 8 = 4 \dots 0$
答：最多可以裝成8盒，剩下4枝。

通過率17/61

23. 下圖中圓的直徑長10公分。



大毛說：線段CD和直徑一樣長。
小毛說：這個圓圓周長比20公分長。
請問誰的說法正確？

① 只有大毛的說法正確。
② 只有小毛的說法正確。
③ 兩人的說法都正確。
④ 兩人的說法都不正確。

25. 圓規兩腳張開8公分畫一個圓，這個圓的半徑是多少公分？
- (1) 16公分 (2) 8公分
(3) 4公分 (4) 2公分

通過率53/61

圓：
「認識生活中的圓」、「認識圓心、圓周、半徑和直徑」、「使用圓規」

選項	1	2	3	4	其他	鑑別度 0.1
TN	0.21	0.18	0.07	0.51	0.03	
全體	0.22	0.21	0.1	0.49	0.02	
高分組	0.14	0.28	0.04	0.53	0.01	
低分組	0.29	0.18	0.16	0.35	0.02	

除法：
「二位數/三位數除以一位數」、「餘數的應用問題」、「除法的估算」

17. 一百顆糖裝滿7袋，每袋有16顆，還剩下5顆。請問要多少顆糖，才能裝滿10袋的糖袋？
- ① 2顆
② 5顆
③ 9顆
④ 11顆

5. 請問「 $908 \div 9$ 」的商和餘數是多多少？
- (1) 商是91，餘數是8
(2) 商是99，餘數是98
(3) 商是10，餘數是8
(4) 商是100，餘數是8

通過率21/61

選項	1	2	3	4	其他	鑑別度 0.37
HSES	0.31	0.1	0.1	0.16	0	
全體	0.26	0.09	0.08	0.57	0.01	
高分組	0.21	0.03	0.02	0.74	0	
低分組	0.28	0.16	0.17	0.38	0.01	

兩步驟解題

選項	1	2	3	4	其他	鑑別度 0.46
HSES	0.18	0.57	0.15	0.1	0	
全體	0.47	0.11	0.1	0.32	0.01	
高分組	0.3	0.06	0.06	0.57	0	
低分組	0.6	0.15	0.12	0.12	0.01	

13. 妹妹每天存25元，4個星期總共存了多錢？
- ① 100元
② 175元
③ 680元
④ 700元

17. 「一桶礦泉水24公升，每2公升裝成一瓶，全部裝完，用掉4瓶後，還剩下多少瓶礦泉水？」
下列哪個算式和答案都正確？
- (1) $24 \div 2 = 12$ ， $12 - 4 = 8$ ，答：8瓶
(2) $24 \div 4 = 6$ ，答：6瓶
(3) $24 \div 2 = 12$ ，答：12瓶
(4) $24 \div 2 = 12$ ， $12 \div 4 = 3$ ，答：3瓶

通過率26/61

18. 「肉包一個18元，一盒有4個，爸爸買了2盒，共花了多少錢？」
下列哪個算式和答案都正確？
- (1) $4 + 2 = 6$ ， $18 \times 6 = 108$ ，答：108元
(2) $18 \times 2 = 36$ ，答：36元
(3) $18 \times 4 = 72$ ，答：72元
(4) $18 \times 4 = 72$ ， $72 \times 2 = 144$ ，答：144元

通過率26/61

一、研究架構及流程圖

(一)研究架構

Asiala 等人(1996)針對 APOS 理論提出特定的三元論循環研究架構，架構組成包含以下三個元素：(1) 發展相對應起源分解(理論分析)、(2) 設計與實踐適當的 ACE 教學循環(教學)、(3) 蒐集與分析來自於 ACE 教學循環的實踐後的資料。研究者將採用 Asiala 等(1996)所提出的研究架構做為本研究架構(如圖5)。

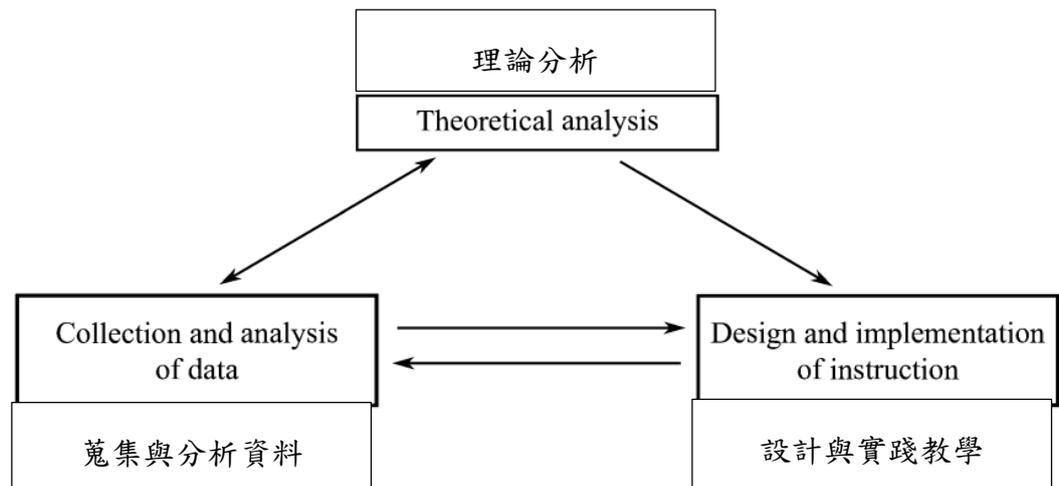


圖5 研究循環 (Asiala et al. 1996)

(二)研究流程

各階段的工作說明如下：

1. 準備階段

本階段的工作內容為：

- (1) 文獻探討、確定研究主題、擬定研究設計及研究工具：閱讀國內外文獻，以形成研究問題，並與研究團隊確定研究主題，最後擬定研究設計。
- (2) 編制研究工具：考相關研究及文獻，做為編訂「數學自我效能問

卷」、「差異化教學任務單」的參考。

- (3) 「數學自我效能問」與「差異化教學任務單」編訂，經專家審視，經由預試對象受測驗後定稿。

2. 發展階段

本階段的工作內容為：

- (1) 起源分解：基於 APOS 理論進行數學概念的起源分解。本計畫將參考 Dubinsky 的 APOS 理論及曾建銘(2016)之三角形面積和梯形面積起源分解(如圖6、圖7)，初步擬定本計畫欲進行的數學概念內容分解架構，在經由精緻化(refinement)→修正(revision)→資料分析(data analysis)循環產出接近反應個體概念認知的起源分解。

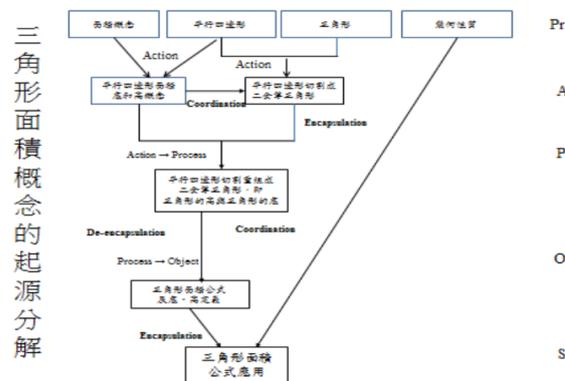


圖6 應用 APOS 理論的三角形面積起源分解(曾建銘，2016)

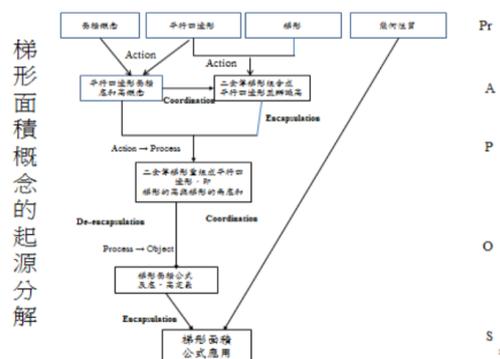


圖7 應用 APOS 理論的梯形面積起源分解(曾建銘，2016)

- (2) 教學設計與實踐：根據 Dubinsky 的 APOS 理論與數學概念起源分解為架構設計相對應的教學活動，並參酌 Prast et al. (2015) 所提出的差異化循環架構設計，同時設計差異化任務學習包，教學單元將參酌歷年「國民小學及國民中學學習扶助方案科技化評量及縣市學生學習能力檢測」結果擇定，並依據十二年課程綱要學習重點，擬定學習活動之教學目標、教學活動，及發展評量。並於實施後蒐集學生作答反應和回饋，最為教學活動設計修改的參考。
- (3) 資料蒐集與分析：將「數學學習成就測驗」與「數學自我效能問」等資料，進行統計、分析，並與學生晤談的質性資料進行交叉分析比對，最終對以 APOS 理論為基礎之差異化教學活動設計修改提供具體的建議。

3. 整理階段

本階段的工作內容為：

- (1) 資料蒐集與分析：將「數學學習成就測驗」與「數學自我效能問」等資料，進行統計、分析，並與學生晤談的質性資料進行交叉分析比對，最終對本研究有興趣的研究者或教學者提供具體的建議。
- (2) 撰寫研究論文：整理結果內容，並做出結論與建議。

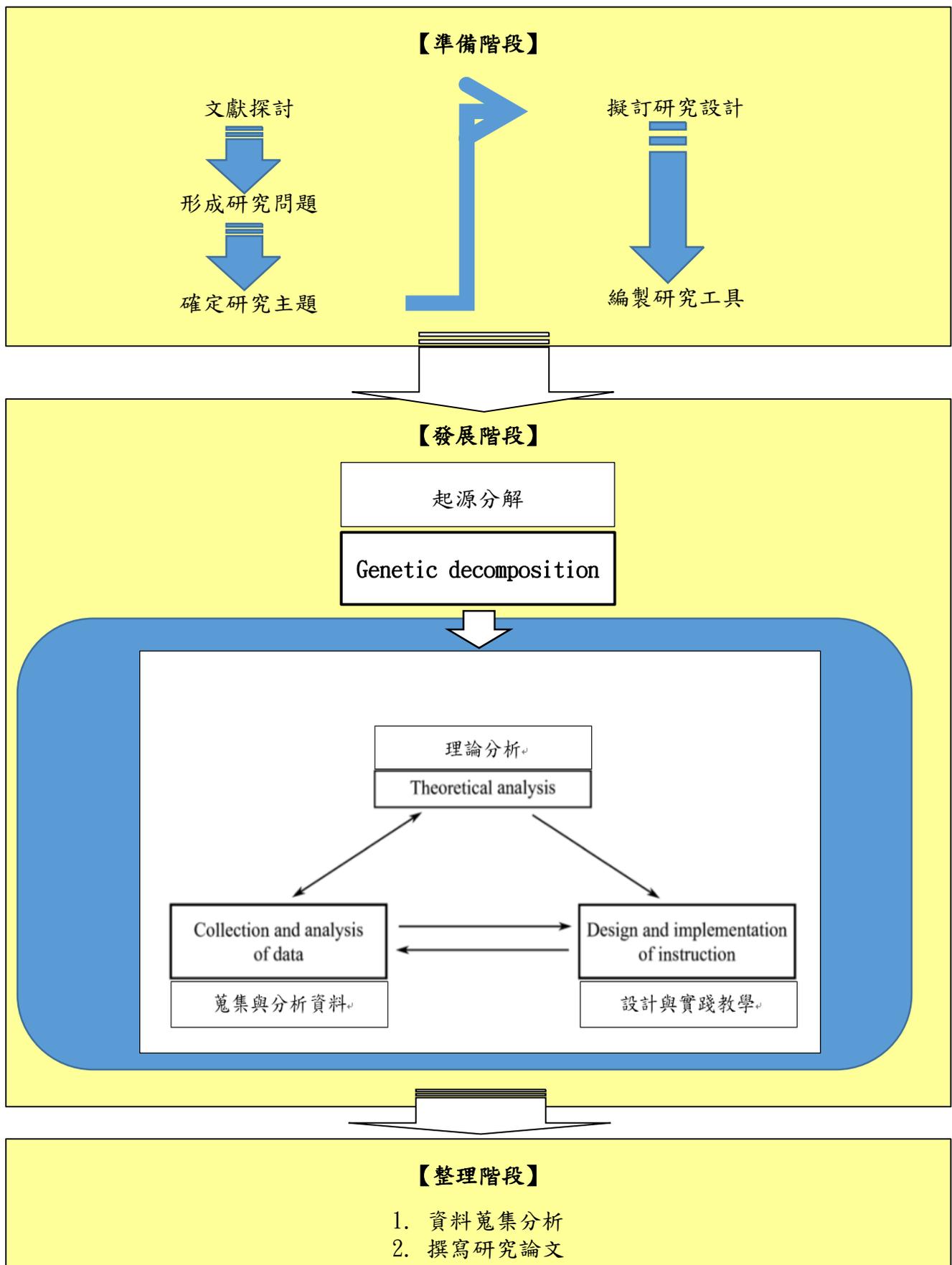


圖8 研究流程圖

二、研究對象

本計畫以臺南市安南區和順國小為研究場域，研究對象為國小中年級二班學生，一班為實驗組，接受實驗教學，一班為控制組，接受一般傳統教學。

三、研究者的背景與角色

研究者的背景與角色 R1：陳主任為國立臺東師院數理教育學系92級畢業，爾後至國立臺南大學數學教育學系碩士班進修，取得碩士學位。碩士論文的研究主題為「數學閱讀活動對數學學習成效之影響與歷程」，目前已發表的文章有「Arranging an environment of an augmented Reality to Investigate Students' Self-learning in break」、「The Case Study of Learning Linear Function」、「Using the APOS to Design Computer Dynamic Activities for Learning the Linear Function」、「A Study of Spontaneous Learning of an Augmented Reality after Class」、「The Study of Implementing Augmented Reality Assessment on Lower-Grade curriculum」、「Utilizing MAR for Remedial teaching of compound-cube-surface area at elementary school in Taiwan」及「Utilizing Free Augmented Reality App for Learning Geometry at Elementary School in Taiwan: Take Volumetric Measurement of Compound Body for Example」。在教學歷程方面分為三階段：第一階段為畢業時分發於高雄縣旗山鎮旗山國小擔任高年級導師三年；第二階段調至臺南市南區大型學校，擔任高年級導師一年；第三階段則是於99學年度調至臺南市東區97年新成立的學校東區裕文國小(本研究場域)，期間參與多年教育部的專案計畫，如「未來想像與創意人才培訓第一年、第二年計畫」、「102、104、106年行動學習試辦學校計畫」、「97學年度科教專案-校園古蹟的科學教學模組發展研究」、「103學年度科學教育專案計

畫—導入 ANT 學習策略之主題探索活動對學生學習自然科學的影響」、「104 學年度科學教育專案計畫—行動者網絡理論(ANT)學習策略導入自然與生活科技領域對學生知識蓄積與學習態度的影響」、「105 學年度科學教育專案計畫—基於視覺化知識結構(Knowledge Structure)之口述數位心智圖(Digital Mind Mapping)學習策略對國小學童科學知識蓄積與學習成就的影響」、「106 學年度科學教育專案計畫-基於知識結構圖架構下之數位科學桌遊教材開發與評估(第一年)」、「107 學年度科學教育專案計畫-基於知識結構圖架構下之數位科學桌遊教材開發與評估(第二年)」、「108 基於知識結構圖架構下之數位科學桌遊教材開發與評估(第三年)」及「基於 APOS-ACE 理論之數學奠基活動探討國小數與量補救教學之實踐與成效評估(第一年)」相當熟稔計畫的執行。陳主任擁有數理背景，於臺南大學數位科技學習系取得博士學位，博士論文題目為「行動式擴增實境輔助學童學習國小數學立體幾何之研究」，對於數學教材的內容知識(Content Knowledge)及教學知識(Pedagogical Knowledge)擁有足夠的掌握度，更具有科技融入的課程設計能力，並曾多次發表科技融入數理課程的研究，在本研究中扮演主持規劃、計畫聯絡人及課程設計與教學的工作。

R2、R3：兩位皆具備有豐厚的教學經驗，在本研究中擔任對照組與實驗組的教學工作，在每個單元上課前，研究者與兩位老師共同備課，確保授課單元核心概念與教學重點的一致性。

表2 研究人員工作分配表

研究人員	在本研究中負責的工作範圍
R1陳主任	主持規劃、計畫聯絡人、APOS/ACE 教學開發與設計、資料搜尋分析等
R2協同教師	協同 APOS/ACE 教學實驗、觀察紀錄、資料蒐集等
R3協同教師	協同 APOS/ACE 教學實驗、觀察紀錄、資料蒐集等

四、活動設計及實踐 ACE 循環

(一) 數學「操作-表徵」活動

活動結合數學知識節點星空圖做為起源分解，依選定單元擬定各項子任務，任務是基於學生操作具體物/圖像/符號過程中使用相對應的心智結構。

(二) 課室討論(Classroom Discussions)

上階段的數學活動需伴隨「組內共學」、「組間互學」等課室討論活動，在課室討論中，學生有機會可以表達他對數學活動的想法、思考及理解，鑒於讓思考可以看得見或可以操作，課室討論將搭配任務單上的圖像或表格等可視的表徵，亦可讓研究者得以分析學生對概念的反思過程，最終由教師針對課程概念的脈絡整理進行導學。

(三) 課後練習(Homework Exercises)

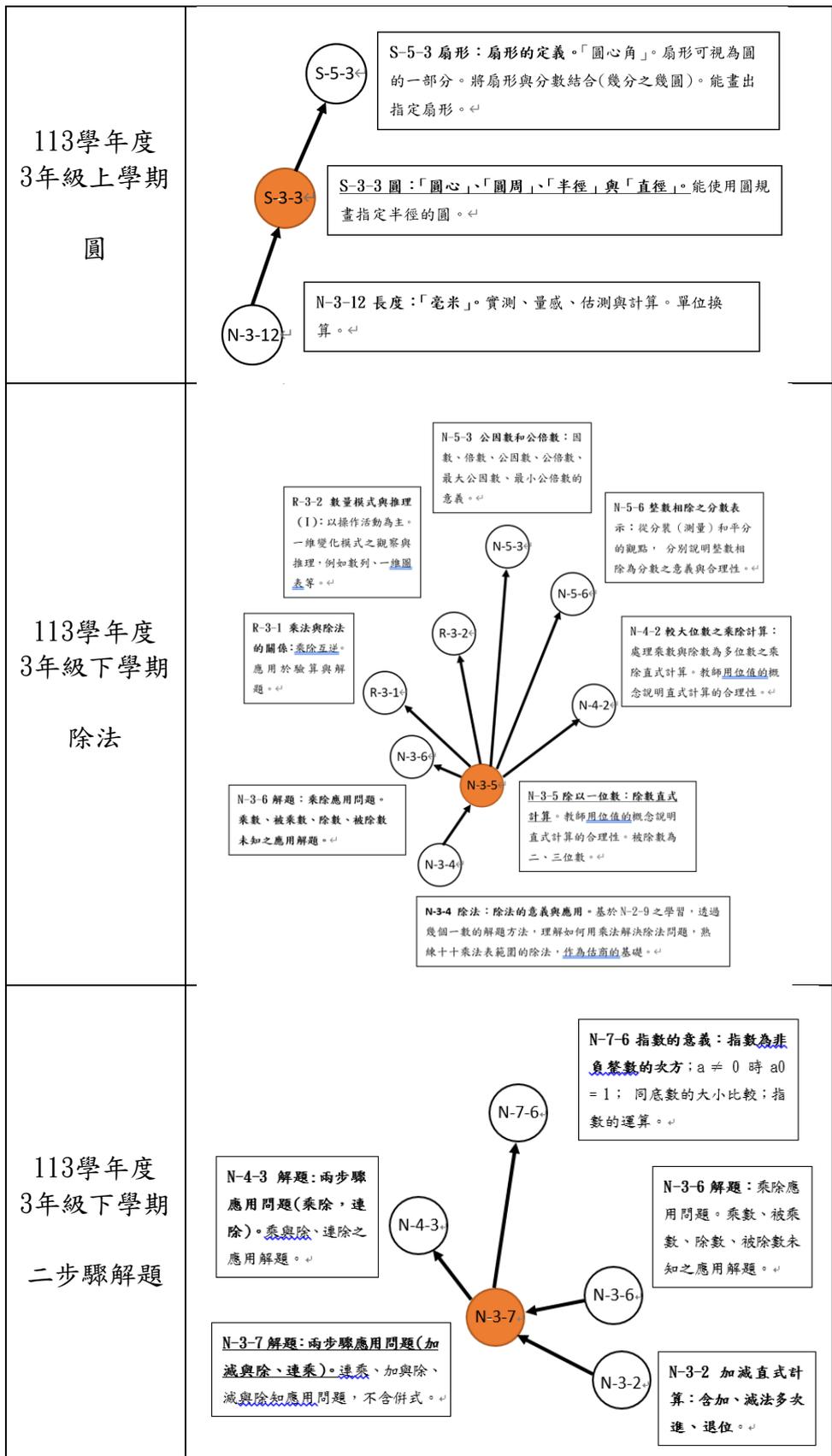
此階段目的在於強化數學活動與課堂討論面向，尤其是在學生透由操作具體物/圖像/符號的過程持續建立及擴展學生對於數學概念的基模(schema)。練習指的是指派給學生的課後作業及比較同一概念的不同情境。

五、教學活動設計

(一) 基因起解(GD)-知識節點星空圖

表3 課程單元基因起解

課程單元	知識節點星空圖
113學年度 3年級上學期 除法	<p>N-3-5 除以一位數：除數直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。⁶¹</p> <p>N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於N-2-9之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題，熟練十十乘法表範圍的除法，作為估商的基礎。⁶²</p> <p>N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。⁶³</p> <p>N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。⁶⁴</p>



(二)教學處置(instructional treatment)

教學活動包含完成系列基於基因起解(GD)的學習任務，任務涉及操作具體物/符號/圖像搭配符號紀錄，預期可以幫助學生透過回顧概念基因起解的概念建構脈絡來有效習得數學概念。單元學習活動以「行動概念(action conception)」、「過程概念(process conception)」及「物件概念(object conception)」對應於ACE教學循環(ACE teaching cycle)規劃三個循環(three iterations)，每一個循環(each iteration)規劃2節課進行任務活動與班級討論，家庭作業(homework exercise)於概念課程結束後分派並於下一個課程概念開始前收回。

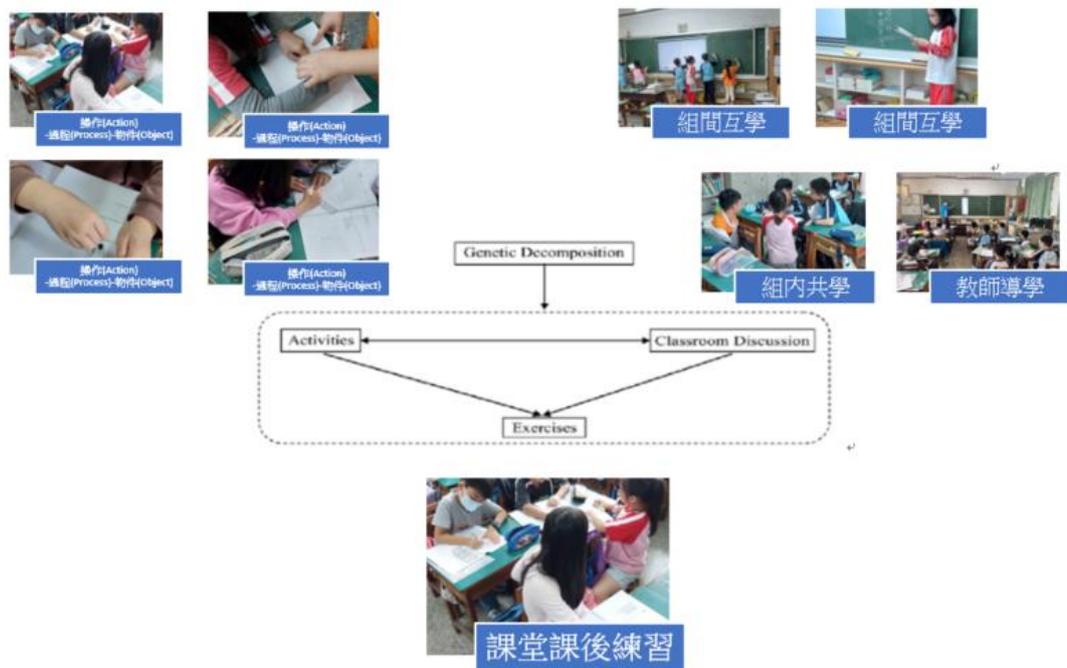


圖7 教學活動示意圖

六、資料蒐集與分析

本研究採行動研究法，資料蒐集分為量化資料與質性資料，分述如下：

(一) 量化資料蒐集、分析、信效度的建立

1. 數學成就測驗

為能了解學生於本研究實驗課程的學習成效，學生於實驗課程前後接受成就測驗評量，評量內容採歷年「國民小學及國民中學學習扶助方案科技化評量及縣市學生學習能力檢測」常錯題型，經專家學者評估修正，與預試對象測驗後定稿，以建立其信效度。評量後的數據進行統計分析，了解學生的學習成效。

2. 數學自我效能問卷

本研究改編自 Sherer & Maddux (1982) 自我效能量表所發展出自我效能量表，內容分為一般性自我效能(general self-efficacy)，包含兩個組成元素，分別為「主動學習(initiation)」、「努力堅持(persistence)」二個向度共17題（如附件三）。本量表採用 Likert Scale 的五點量表，1代表非常不同意、2代表不同意、3代表普通、4代表同意、5代表非常同意，評分方式為回答1者給1分、回答2者給2分，以此類推，反向題題號為2、4、5、6、7、10、11、12、14、16、17，評分方式與正向題相反，得分數較高者，表示自我效能較高，量表信度預試結果內部一致性考驗後整體 Cronbach's α 值為.753。

(二) 質性資料蒐集、分析、信效度的建立

1. 資料蒐集

(1) 課室觀察：

在實驗課程期間以實際觀察來獲取資料，並蒐集相關文獻。

(2) 教師省思札記：

紀錄研究者在研究過程及教學設計歷程與教學活動後自我反省與觀察之所得。

(3) 學生心得回饋單：

研究者針對課程實施歷程成設計心得回饋單，以文字方式記錄學生學習歷程。

(4) 半結構式晤談：

研究者針對課程實施及量表內容，進行半結構式晤談，透過對話內容分析瞭解學生學習歷程。

2. 資料轉譯與編碼

分析的資料包括實地觀察紀錄、觀察者互動訪談、教師省思札記、研究者與學生之晤談紀錄。以下將說明本研究原始資料的轉譯與編碼方式，以便於研究資料的整理與呈現。

表4 資料轉譯代號說明表

代號	說明
TR	代表教學者
TA	代表觀察教師
TG	代表研究群教師
S01	代表某位學生（S01、S02、S03、表示不同座號的學生）
SS	代表全部或大部分學生
:	代表某人說話
()	情境的補充描述
……	內容的省略

表5 資料編碼說明表

類別	內容綱要	範例說明
(札 TR 年月日)	研究者札記	(札 TR981012) 研究者98年10月12日的教學省思札記
(觀 TA 年月日)	觀察教師日誌	(觀 TA981012) 觀察教師98年10月12日的教學觀察記錄
(平 TA 年月日)	教師教學歷程軌跡	(平 TA981012) 研究者98年10月12日的教學歷程軌跡
(平 S01 年月日)	學生學習歷程軌跡	(平 S01981012) 學生98年10月12日的教學歷程軌跡
(訪 TA 年月日)	觀察教師訪談記錄	(訪 TA981012) 與觀察教師於98年10月12日的訪談記錄
(訪 S01 年月日)	學生訪談記錄	(訪 S01981012) 與學生 S01於98年10月12日的訪談記錄
(單 N-AS01)	學生第 N 單元第 A 張的學習單	(單 2-1S01) 學生 S01 在第二單元第一張的學習單

3. 資料分析

由於本研究將所收集資料分類編碼後，並透過研究者本身、研究樣本、觀察者進行資料的交叉比對，再依據研究目的分析影響研究結果的原因。以下圖來表示研究團隊在質性資料的分析作法：

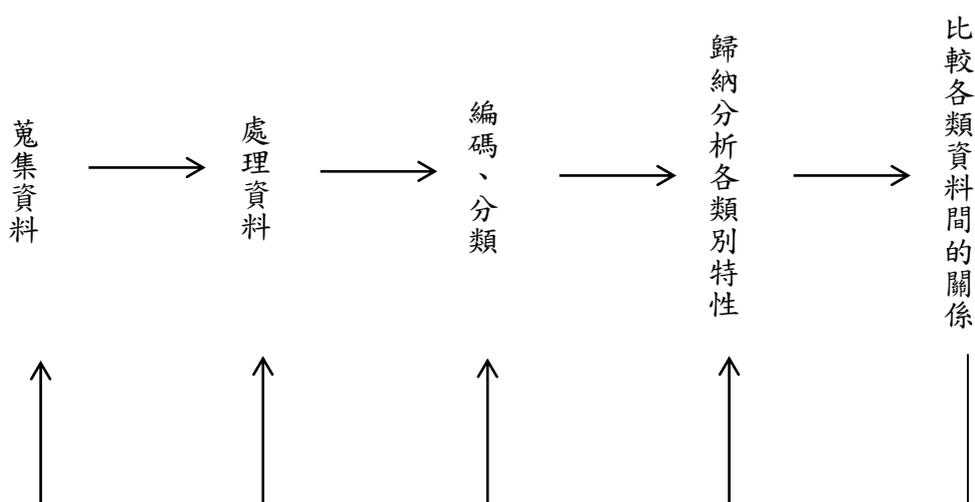


圖8 質性資料的分析作法

4. 信度與效度的建立

(1) 信度的建立

本研究採用多元的方式蒐集資料，資料來源包括觀察者互動訪談、學習表現、教師心得札記、學習歷程紀錄等不同來源，以多元回饋的資料與三角校正的資料比來增加研究的可信度。「三角校正法」(triangulation)進行資料的比對，方式如下：

- A. 資料的校正方面：在訪談過程中，請受訪學童確認其心得回饋單作答是否與真實之想法一致，並藉由訪談結果與學童之心得回饋單作答結果對照，檢驗是否具一致性，亦即同時檢驗心得回饋單的可信度。
- B. 研究人員的校正方面：將整理的資料，由整個研究團隊進行交互核對，儘量使收集的資料和分析結果趨向客觀。
- C. 方法的校正方面：使用心得回饋單、觀察與訪談等方法來探討受試者的想法，使收集資料更加可靠。

(2) 效度的建立

Lincoln 與 Guba 指出：質性研究的效度其實就是指可靠性、穩定性、一致性、可預測性與正確性。在效度的建立上，本研究在研究情境中先組成研究群，利用合作研究的討論來提高效率的建立；另外，依據教育部公佈之十二年課程綱要中數學領域之課程目標，著手擬定 APOS/ACE 教學活動設計。初步完成活動設計後，邀請數學教育專家及具有5年以上數學教學經驗的專家教師進行審查，使活動教案的課程內容具備專家效度。本研究的具體做法是：

1. 在資料蒐集與分析的過程中，反覆的檢覈資料與審思資料中所蘊涵的意義，透過不斷的自我反省與批判及與「研究團隊」間的對話，以確認自己的研究成果趨向真實性，避開研究的偏見或迷思，以提高本研究的「內在效度」，即所謂的「確實性」。
2. 盡量廣泛詳盡的描述研究的情境，將研究時真實的一面顯現出來，讓讀者或其他研究者能將研究情境的結果，應用在自己的情境中，以提昇本研究的「外在效度」，即所謂的「可轉換性」。

肆、目前研究結果：

- 一、接受「APOS 理論為基礎之差異化教學活動學生」與接受「一般傳統教學活動學生」於「除法單元」成就測驗後測表現皆優於前測。

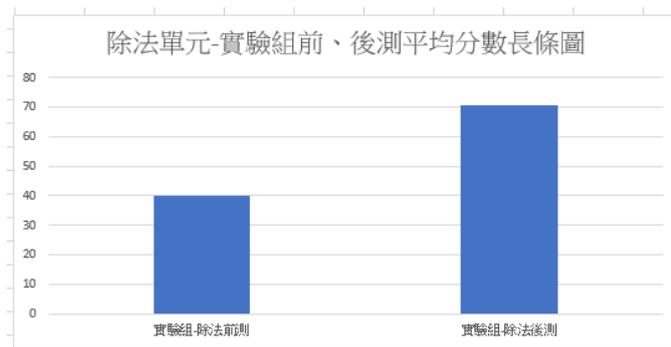


圖9 除法單元-實驗組前、後測平均分數比較長條圖

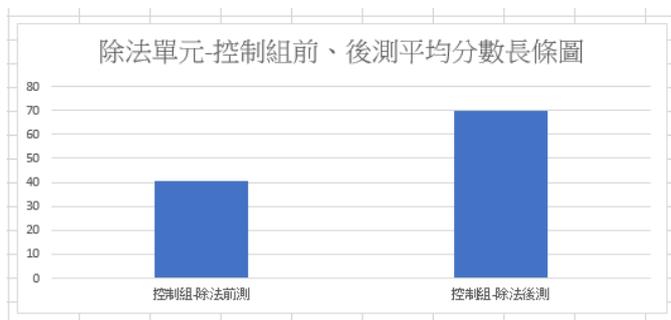


圖10 除法單元-控制組前、後測平均分數比較長條圖

二、接受「APOS 理論為基礎之差異化教學活動學生」較接受「一般傳統教學活動學生」於「除法單元」成就測驗後測表現略高，但未達統計上的顯著性($F=.011$ ， $P=0.918>.05$)。

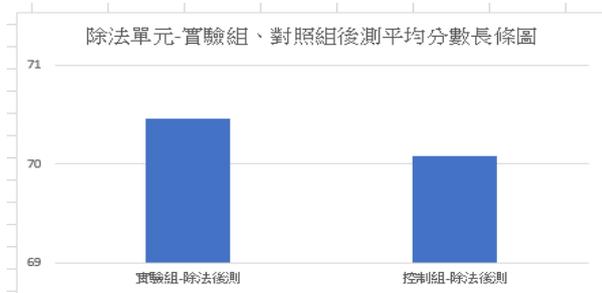


圖11 除法單元-實驗組、對照組後測平均分數比較長條圖

表6 共變數分析摘要一覽表

依變數：後測

來源	型 III 平方和	df	平均平方和	F	顯著性	淨相關 Eta 平方
校正後的模式	9967.120 ^a	2	4983.560	17.353	.000	.420
截距	21121.342	1	21121.342	73.545	.000	.605
前測	9965.264	1	9965.264	34.699	.000	.420
組別	3.076	1	3.076	.011	.918	.000
誤差	13785.037	48	287.188			
總數	275616.000	51				
校正後的總數	23752.157	50				

a. R 平方 = .420 (調過後的 R 平方 = .395)

三、接受「APOS 理論為基礎之差異化教學活動實驗組學生」較接受「一般傳統教學活動學生」於「除法單元」成就測驗前、後測進步幅度略高。

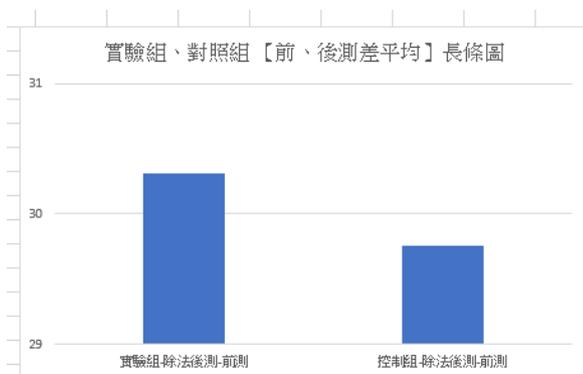


圖12 實驗組、對照組【「除法單元」前、後測差平均】比較長條圖

四、接受「APOS 理論為基礎之差異化教學活動學生」較接受「一般傳統教學活動學生」於「除法單元」教學後自我效能問卷呈現較正向(如圖13)，且達統計上的顯著性($F=7.742$ ， $P=.008<.05$)。

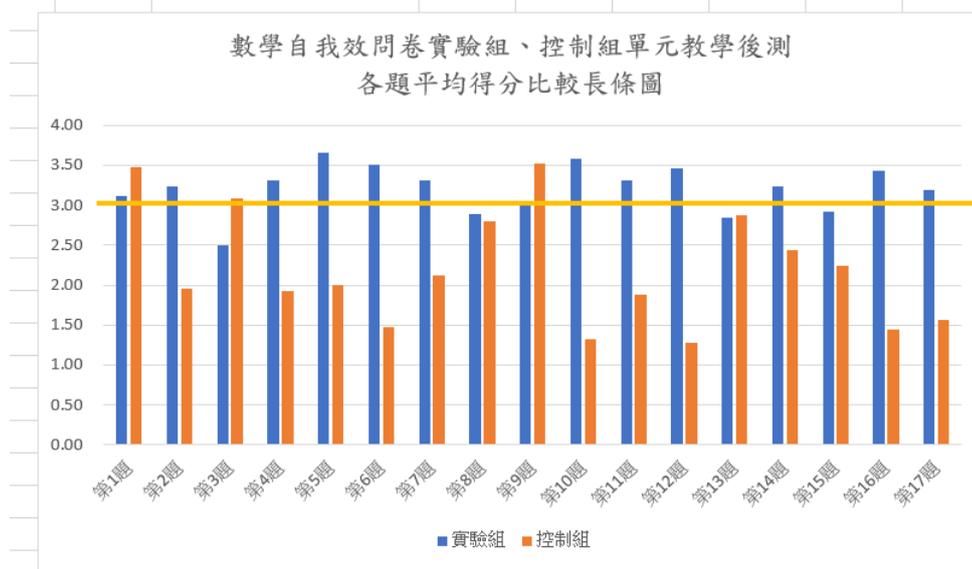


圖 13 數學自我效問卷實驗組、控制組單元教學後測各題平均得分比較長條圖

表7 實驗組、控制組描述性統計一覽表

		組別統計量			
	組別	個數	平均數	標準差	平均數的標準誤
自我效能	實驗組	26	54.4615	8.80105	1.72603
	控制組	25	37.4000	5.04975	1.00995

伍、目前完成進度：

- 一、完成「除法/3上」、「圓/3上」兩個單元的差異化任務包。
- 二、完成「除法/3上」、「圓/3上」兩個單元的成就測驗前、後測。
- 三、完成「除法/3上」單元的成就測驗及自我效能問卷前、後測量分析。

陸、預定完成進度：

表8、研究甘特圖

年月	113年					114年						
	8月	9月	10月	11月	12月	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月
文獻探討	[Blue bar spanning all months]											
形成研究問題	[Orange bar]											
確定研究主題		[Red bar]										
擬定研究設計		[Red bar]										
編製研究工具		[Purple bar]										
設計實驗課程			[Green bar]									
進行實驗教學							[Green bar]					
資料蒐集分析							[Blue bar]					
撰寫教學研究初稿										[Light Green bar]		
完成教學研究成果												[Dark Blue bar]

陸、建議與討論：(含遭遇之困難與解決方法)

一、基於 APOS 理論之差異化實驗教學處置在一個單元於後測的學習成效似乎與接受一般傳統教學活動處置沒有差異。

針對目前的研究發現，研究團隊將持續到導入實驗處置，並於學期結束前增加延後測施測及挑選不同程度的個案訪談，以進一步探究實驗處置的成效。

柒、參考資料：

吳清山(2012)。差異化教學與學生學習。國家教育研究院電子報，第38期。

高家斌、蘇玲慧(2014)。國中學生協同學習、學習策略與數學自我效能關係之研究。教育理論與實踐學刊，頁25-55。

張宇樑(2015)。差異化教學在國小數學課室之應用。收錄於張新仁主編中小學教學改革。台北：中華民國課程與教學學會。

曾建銘(2016)。運用 APOS 理論教學設計的認知診斷評量研究。行政院科技部專題研究成果報告。(編號：MOST 104-2511-S-656-003)，未出版。

甄曉蘭(2012)。差異化教學策略研習手冊。臺北市：國立臺灣師範大學教育研究與評鑑中心。

謝哲仁、陳孟訓、李慶志(2014)。視覺數學遞迴程序知識的動態電腦設計成效。文章發表於第18屆全球華人計算機應用大會(GCCCE 2014)，上海，中國。

龔心怡(2008)。影響數學學習成就相關因素之探究：數學自我概念與數學自我效能。研究與創新，9，7-8。

Arnon, I., Cottrill, J. Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014), APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education, Springer, NY, Heidelberg, Dordrecht, London. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996), A framework for research and development in undergraduate mathematics education, Research in Collegiate Mathematics Education, 6(2), 1-32. DOI: 10.1090/cbmath/006/01.

- Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, 84(2), 191–215. DOI: 10.1037/0033-295X.84.2.191.
- Corkett, J., Hatt, B., & Benevides, T. (2011). Student and teacher self-efficacy and the connection to reading and writing. *Canadian Journal of Education*, 34(1), 65–98.
- Dubinsky, E., & Leron, U. (1994). *Learning abstract algebra with ISETL*. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-2602-4.
- Hoy, A. W., & Spero, R. B. (2005). Changes in Teacher Efficacy during the Early Years of Teaching: A Comparison of Four Measures. *Teaching and Teacher Education*, 21, 343–356. DOI: 10.1016/j.tate.2005.01.007.
- Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2015). Readiness-based differentiation in primary school mathematics: Expert recommendations and teacher self-assessment. *Frontline Learning Research*, 3(2), 90–116. <https://doi.org/10.14768/fr.v3i2.163>.
- Roberts, J. L., & Inman, T. F. (2007). *Strategies for differentiating instruction: Best practices for the classroom*. Waco, TX: Prufrock.
- Sherer, M., Maddux, J. E., Mercandante, B., Prentice-dunn, S., Jacobs, B., & Rogers, R. W. (1982). The Self-efficacy Scale: Construction and validation. *Psychological Reports*, 51(2), 663–671.
- Tomlinson, C.A. (1995). *How to differentiate instruction in mixed-*

ability classroom. Alexandria, VA: ASCD.

Tomlinson, C. A., & Imbeau, M. B. (2010). Leading and Managing a Differentiated Classroom. Alexandria, VA: ASCD.

Tomlinson, C.A. (2014)。差異化班級-回應所有學習者的需求(張碧珠、呂潔樺譯)。五南。(原著出版年：2018)

附件一、差異化學習任務單

附件二、成就測驗

附件三、自我效能量表